ANÁLISE DA APRENDIZAGEM CONCEITUAL DE DERIVADA ATRAVÉS DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS QUE CURSARAM A DISCIPLINA CÁLCULO I

Jurema Lindote Botelho Peixoto-UESC
jurema@uesc.br
Marcos Rogério Neves-UESC
Marcos_neves2001@yahoo.com.br
Larissa Pinca Sarro Gomes-UESC
lpsgomes@uesc.br
Maria Margarete do Rosário Farias-UESC
margarete333@hotmail.com

Resumo

Por sua aplicabilidade na resolução de problemas, os conhecimentos relacionados ao Cálculo Diferencial cumprem um papel fundamental na formação não apenas na área de Matemática, mas também de Engenharia, Agronomia, Computação, Física, Biologia, entre outras. Apesar de sua reconhecida importância, tanto a experiência docente quanto pesquisas no campo da Educação Matemática mostram que a qualidade das aprendizagens dos estudantes precisa melhorar. A partir das contribuições de abordagens cognitivas da aprendizagem matemática como as propostas por Vergnaud, compreendemos que a ampliação gradativa da qualidade das aprendizagens conceituais do estudante e o desenvolvimento das competências do raciocínio matemático são dimensões inter-relacionadas que compõem a complexidade/riqueza do conhecimento matemático e que a tomada de consciência deste fato por parte de docentes e estudantes é um passo importante para orientar a busca de parâmetros de qualidade que podem orientar o planejamento de ensino e das atividades de estudo. A partir destas idéias sobre a complexidade da aprendizagem, analisamos a respostas fornecidas por estudantes de graduação em Matemática a perguntas relacionadas à definição de derivada e seu campo conceitual, formuladas em um questionário diagnóstico, que geralmente aplicamos no início da disciplina Cálculo II para subsidiar nosso planejamento de ensino. As análises apontaram a predominância da dimensão gráfica e simbólica, estas, nem sempre articuladas. Em nenhum momento apareceu a dimensão numérica, ou seja, a derivada como uma taxa de variação. E no ensino de Cálculo o professor deve estar atento para abordar todos os aspectos do conceito em várias situações problemas para que o aluno possa dominar o conceito.

Palavras-chaves: Campo conceitual, Derivada, diagnóstico.

Introdução

O Cálculo diferencial é uma disciplina tradicional no currículo do curso de Matemática e de outros cursos na universidade, como Biologia, Agronomia, Economia, Administração, Medicina Veterinária, Ciência da Computação, entre outros; por se constituir numa ferramenta importante para resolução de muitos problemas em diversas áreas e ser pré-requisito para o estudo de várias disciplinas do curso de Matemática.

Diversos estudos enfocam questões relacionadas às dificuldades de ensino e a aprendizagem em Cálculo. Alguns deles focalizam as concepções dos alunos (TALL E VINNER, 1983, CORNU,1981; SIERPINSKA, 1981), outros apresentam um enfoque epistemológico (CORNU, 1983), alguns direcionaram sob pesquisa sob uma perspectiva cognitiva (LEME, 2003, SOUZA, FATORI E BURIASCO, 2005).

Apesar de mais de uma década de divulgação de muitos destes estudos, tudo indica que ainda hoje muitos alunos passam por um curso de cálculo sem realmente entender o significado de alguns conceitos. As conseqüências da baixa qualidade destas aprendizagens repercute na qualidade das aprendizagens em muitas outras disciplinas nos diversos cursos de graduação como, na disciplina Análise Matemática dos cursos de bacharelado e licenciatura, que dependem diretamente de conceitos básicos de Cálculo (SOUZA, FATORI e BURIASCO, 2005). E segundo Wenzelburger (1993, p. 3)

> generaciones de alumnos pasaron por un curso de Cálculo sin realmente entender el significado y la utilidad de esta rama de las matemáticas. Esto se debe sobre todo a la manera abstracta y formal, en la cual se presenta normalmente a materia.

A culpa da baixa qualidade das aprendizagens muitas vezes é atribuída injustamente ao rigor da abordagem oferecida nos cursos. As abordagens do curso de cálculo costumam variar, conforme as necessidades dos campos de atuação dos profissionais a serem formados na Universidade. Assim, o rigor em relação à apresentação dos conceitos e demonstrações (preferido nos cursos da área de Matemática) pode ser flexibilizado e postergado em cursos como as Engenharias, em função da necessidade de se acelerar a aprender dos métodos.

Para além do debate sobre o rigor da apresentação das idéias do Cálculo, gostaríamos de manter em pauta a discussão sobre as características dos conhecimentos que podem ser adquiridos em seu estudo.

O Cálculo é utilizado e ensinado, sobretudo, por sua capacidade de reduzir problemas complexos das diversas áreas das Ciências a regras e procedimentos simples. Este aspecto redutor às vezes joga como vilão no processo de aprendizagem, pois permite abordá-lo como um conjunto de regras e procedimentos, aplicáveis mecanicamente em situações puramente algébricas. Isso nega aos alunos, possibilidades que escapem dos algoritmos algébricos, constituindo-se quase sempre em reprodução de informações ou situações algébricas.

Assim, de modo semelhante ao que discute Gómez-Granell (2002), se produz um ensino limitado em significados e restrito ao uso de apenas uma linguagem. Estimula-se a aprendizagem pela repetição de procedimentos, levando o aluno a considerar que "domina a matéria" ao fazer e refazer longas seqüências de cálculos e que é incompetente quando simplesmente erra uma operação algébrica (GUIMARÃES, 2002).

Contrapondo ao excesso de tratamento nos processos algébricos Stewart (2006) também estimula no seu livro ensinar por meio da descoberta, ou seja, fazer com que o aluno partilhe da emoção das descobertas da mesma forma que ocorreu na produção histórica do conhecimento. Segundo ele o ímpeto para o atual movimento no ensino de cálculo vem da Conferência de Tulane, de 1986, que formulou como recomendação fundamental: *Focalizar na compreensão conceitual*, onde os tópicos devem ser apresentados de forma geométrica, numérica e algébrica. Mais recentemente foi acrescentada o ponto de vista verbal ou descritivo.

Nossa prática docente também tem mostrado que os alunos obtêm mais sucesso no tratamento algébrico e operatório do que em tarefas que envolvem conceitos. Para Leme (2003) esse fato é observado quando se trata de tarefas relacionadas à noção de derivada. Muitas vezes isso se dá, em razão da abordagem do ensino, mas parece que essa não é única causa. Mesmo que o professor trabalhe com tarefas que priorizem a abordagem conceitual, isso não significa que os alunos deixarão de priorizar os aspectos conceituais.

Causa revelam a possibilidade de dificuldades intrínsecas à aprendizagem de noções abstratas.

Neste contexto, assumimos que derivada é um dos conceitos mais importantes no curso de Cálculo I e a partir do diagnóstico que sempre fazemos em todas as disciplinas que lecionamos, pretendemos investigar a qualidade das aprendizagens relacionadas à definição de derivada e seu campo conceitual. Isto nos remete a questões como: Que dimensões deste campo conceitual o estudante domina? Quais linguagens ele articula ao explorá-lo? Que contextos e situações-problema dentro e fora da Matemática ele associa a estas idéias? Será que ele pode falar deste conceito de forma correta para que todos possam entender mesmo para quem não estuda a matemática superior? A resposta para estas perguntas poderá nortear melhor um curso de cálculo e indicar novos caminhos na nossa prática, enquanto professores da disciplina.

O presente artigo tem por objetivo trazer nossas reflexões sobre o ensino de Cálculo, particularmente, ao ensino do conceito de derivada. Primeiramente, discutimos a complexidade da aprendizagem de conceitos e competências de raciocino matemático. Em seguida, apresentamos o conceito de derivada e o mapa conceitual deste conceito. Por fim, analisamos as respostas de estudantes de Matemática a um questionário aberto, proposto com o objetivo de diagnosticar os aspectos do campo conceitual da derivados compreendidos por eles. Os resultados são discutidos à luz das idéias sobre a complexidade da aprendizagem de Gérard Vergnaud e Kendal (2001).

Complexidade das aprendizagens em matemática

Sob o enfoque da didática, investigam-se as origens das dificuldades de aprendizagem investigando a relações possíveis entre os elementos que participam diretamente dos processos de ensinar e aprender, quais sejam: professor, estudante e conhecimento. Ao focalizar as dificuldades de aprendizagem que podem ser geradas na interação entre estes elementos, Pais (2001) se baseia nas contribuições de muitos autores e nos mostra uma diversidade de relações que perpassam a atividade em sala de aula e que nem sempre tem origem nela.

Em relação ao conhecimento matemático, ele nos leva a ponderar que aprendizagens substantivas envolvem processos lentos e gradativos de aquisição de conhecimentos do domínio epistemológico e histórico das disciplinas e no que tange a riqueza da Matemática, a complexidade da produção e da aprendizagem de conceitos é um elemento muito importante a ser considerado na atividade consciente do professor. Ao discutir esse tema, este autor recorre ao pensamento de Gérard Vergnaud, organizado na teoria dos campos conceituais.

Segundo Moreira (2002), partindo das idéias de Piaget, Vergnaud estudou o funcionamento cognitivo de sujeitos em situação de enfrentamento de problemas, tomando como referência o próprio conteúdo do conhecimento e a análise conceitual do domínio desse conhecimento.

Vergnaud assume como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. Campo conceitual é, para ele, um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição.

Assim, a aprendizagem conceitual está sempre em estado de devir – em constante aperfeiçoamento – e o domínio razoável de um campo conceitual não se completa rapidamente. Ao contrário, novos problemas e novas propriedades estudadas vão agregando dimensões a cada campo e aperfeiçoando o que foi aprendido, progressivamente enquanto este vai sendo dominado.

Três argumentos principais levaram Vergnaud (citado em MOREIRA, 2002) ao conceito de campo conceitual: 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

A teoria dos campos conceituais assume que a alma do desenvolvimento cognitivo é o processo de conceitualizar e deve-se dar toda atenção aos aspectos conceituais dos problemas e à análise conceitual das situações para as quais os estudantes desenvolvem seus esquemas de pensamento na escola ou fora dela, e também pelo conteúdo.

Embora Vergnaud tenha focalizado campos conceituais associados à Matemática, sua teoria não é específica desses campos, nem da Matemática. Em Física, por exemplo, há vários campos conceituais, como o da Mecânica, o da Eletricidade e o da Termologia, que não podem ser ensinados, de imediato, nem como sistemas de conceitos nem como conceitos isolados.

Pais (2001) e Vergnaud fornecem elementos importantes para a análise de muitos destes aspectos. Além de tornarem mais complexa nossa visão sobre a aprendizagem conceitual, nos mostra que ela esta está intimamente ligada aos contextos/problemas nos quais é experimentada, assim como à mobilização das competências de construir modelos matemáticos, realizar tratamentos e comunicar idéias em diferentes linguagens dentro e fora da Matemática.

O Conceito de Derivada

A diferenciação resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos (EVES, 2004). A origem da noção de derivada é produto de uma grande evolução na qual Newton e Leibniz desempenharam papéis decisivos. Esta evolução emergiu da necessidade de resolver dois problemas: o problema das tangentes (determinar a reta tangente a uma curva) e o problema das quadraturas (calcular a área determinada sob uma curva dada).

Segundo Leme (2003) o problema das tangentes, cujo enfoque é **gráfico**, originou-se do interesse dos pesquisadores em encontrar máximos e mínimos de funções. Para caracterizar estes pontos, parecia natural utilizar retas tangentes à curva. A generalização de encontrar as retas tangentes em qualquer ponto da curva levou ao procedimento em que para se determinara inclinação da reta tangente no ponto (x_0, $f(x_0)$), dava-se um incremento h a x_0 e traçava-se uma reta secante aos pontos (x_0,f (x_0)) e (x_0, +h, $f(x_0+h)$). A posição limite das secantes quando $h \to 0$ determinava uma reta que se denominou reta tangente (Figura 1).

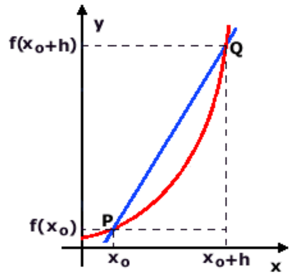


Figura 1: Reta secante a

A inclinação *m* desta reta tangente é dada pelo limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m$.

Este limite foi definido como *a derivada de uma função f no ponto x_0* que pertence ao domínio da função, denotada por f' (x_0), se este limite existir. Desta forma temos a interpretação da **derivada como a inclinação da reta tangente**. Este enfoque é o mais abordado em alguns livros didáticos, ele é **gráfico e simbólico** na definição do limite.

A velocidade de um objeto em um determinado momento também era interesse dos pesquisadores e era dada por meio do cálculo do limite $\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$, onde a razão $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ é a velocidade média do objeto. Dessa forma, temos a interpretação da **derivada como taxa de variação instantânea**, que é o limite das taxas médias de variação sobre os intervalos cada vez menores. Este enfoque da noção de derivada é **numérico**. A conexão com a primeira interpretação é que se esboçarmos a curva y = f(x), então, a taxa instantânea da variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde x = a.

Pelo que vimos acima, concordamos com Vergnaud (1998, apud Kendal, 2001) quando afirma que "...o conceito de derivada envolve conhecimentos de representações numéricas, gráficas e simbólicas e um processo cognitivo relacionando-as. Cada representação de diferenciação é associada a um específico conhecimento processual".

E para compreender melhor este conceito e suas representações/relações nos referenciamos ao trabalho de Kendal (2001) que estudou o impacto do ensino na compreensão dos estudantes do conceito de derivada. Para medir esta compreensão ela desenvolveu *Arquitetura conceitual da Derivada*. Esta possui a seguinte configuração: *Dados de entrada* $\rightarrow$ *Processo cognitivo* $\rightarrow$ *Dados de saída*.

Com a análise centrada na estrutura das questões construiu três parâmetros: representação de entrada (numérica(N), gráfica(G) ou simbólica(S)), processo cognitivo que relaciona as representações de entrada com as representações e saída (envolve formulação(F) e interpretação(I)) e representação de saída (numérica(n), gráfica (g) e simbólica(s)). Construiu com isso um protótipo formado por 18 casos que denomina de competências, a partir da combinação das possibilidades de ocorrência destes três parâmetros: GFn, NFg, SFn, etc.

Chamou de *Formulação* a habilidade de reconhecer a representação de entrada, sejam numéricas, gráficas ou simbólicas. E chamou de *Interpretação* a habilidade de discorrer sobre uma entrada explicando em língua natural ou dando sentido equivalente, de uma derivada, nas representações numérica, gráfica ou simbólica.

Fazendo um recorte do trabalho de Kendal para enfocar a articulação entre as representações numéricas, gráficas e simbólicas, apresentamos a seguir um esquema sobre as representações da noção de derivada, elaborado pela autora.

Na Figura 2 as representações numéricas, simbólicas e gráficas são representadas por um círculo e as setas indicam as articulações entre elas. As informações do mundo real foram agregadas à representação numérica como dados numéricos de entrada (N). A representação simbólica incorpora o processo de limite quando regras padrões de diferenciação são empregadas e o resultado é uma função simbólica ou um valor específico em um ponto.

Até aqui listamos os aspectos mais importantes relacionados ao campo conceitual da derivada e suas interpretações. Fizemos isso porque estes elementos são importantes para nosso objetivo de analisar a qualidade das aprendizagens de nossos estudantes com base em suas respostas.

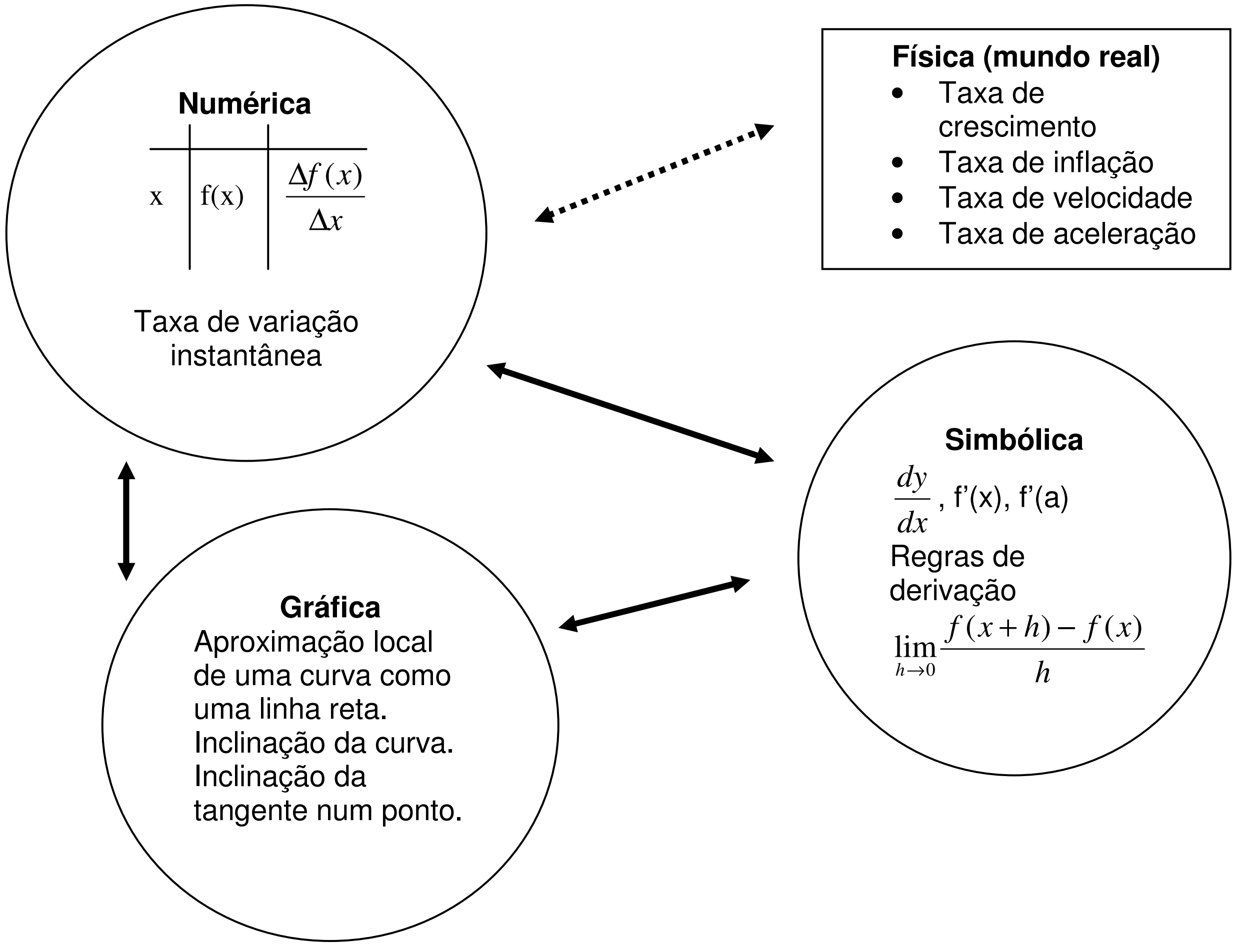


Figura 2. Mapa conceitual de representações de Diferenciação

Procedimentos metodológicos

Participaram deste estudo sete alunos do curso de Bacharelado em Matemática que cursavam o terceiro semestre e já tinham cursado a disciplina Cálculo I. Um questionário aberto foi elaborado com dez questões que enfatizavam a compreensão de conceitos como limite, derivada e integral. Destas questões foram selecionadas para análise apenas quatro que se referiam somente à noção de derivada. A aplicação do questionário ocorreu em situação normal de aula, no primeiro dia de aula do semestre na disciplina Cálculo II, ministrada por uma das autoras deste trabalho. Vale salientar que estes alunos não foram alunos da mesma professora no semestre anterior. Destes, somente seis responderam as questões, pois um aluno disse que não tinha condições de responder. Para fundamentar nosso estudo aproveitamos nossas reflexões sobre "Qualidade do conhecimento

Matemático” que desenvolvemos no GPEMEC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e em Ciências) à luz da Teoria dos Campos conceituais de Gerard Vergnaud e de revisões de literatura sobre o tema em questão, como o estudo de Leme (2003) e Godoy(2004), destacando-se para análise dos dados o Mapa Conceitual de Kendal (2001). Vale ressaltar que nossas questões não foram questões estruturais, que envolviam dados de entrada: N, G ou S, mas questões conceituais que evocavam as diversas representações (N, G ou S)/conexões deste conceito.

Complexidade da aprendizagem nas respostas dos alunos

Apresentaremos aqui as quatro questões que foram selecionadas para a análise e as discussões das respectivas respostas dos alunos:

1ª questão O que é a derivada de uma função? Com esta questão objetivou-se verificar a habilidade de discorrer sobre a noção de derivada em língua natural ou dando sentido equivalente nas representações numérica, gráfica ou simbólica.

Nesta questão, 4 alunos deixaram em branco, apenas 2 alunos responderam:

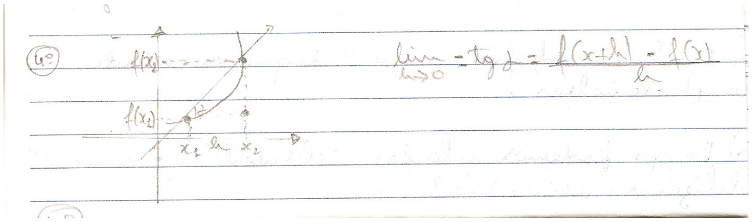
“A derivada de uma função é quando dada uma curva, a reta secante quando tende a uma reta tangente é chamada de derivada”.

“Se a, b é contínua em f, [a,b] temos que a derivada de uma função é dada por f’(x)= $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ou ainda, $f' = \lim_{x \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, onde a∈ R”.

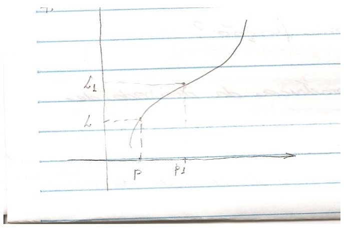
Temos aqui duas respostas, a primeira resposta embora formulada de maneira tosca, nos remete a interpretação geométrica da derivada, a representação utilizada foi a linguagem natural. A segunda resposta, embora incorreta na redação inicial, nos remete a representação simbólica, incorporando o processo de limite. Nenhum dos alunos discorreu sobre a representação numérica, ou seja, da derivada como uma taxa de variação.

2ª questão Qual a interpretação geométrica da derivada? Com esta questão objetivou-se saber se os alunos sabiam interpretar a derivada como a inclinação da reta tangente à uma curva num dado ponto.

Nesta questão 4 alunos responderam: o primeiro escreveu “é a reta tangente a uma curva”. Esta afirmação não está correta, pois é a inclinação da reta tangente. O segundo fez uma representação gráfica coordenada com a representação simbólica:



Outro aluno fez apenas um esboço do gráfico de uma curva qualquer, sem representar a reta tangente.



E o último aluno disse "com a derivada podemos traçar o gráfico e analisar onde o gráfico corta, ou seja, podemos ver a área". Este deixou claro que não entendeu o conceito.

3ª questão Qual é a interpretação analítica da derivada de uma função? Com esta questão objetivou-se avaliar se os alunos sabiam a representação simbólica que evoca o limite, ou seja, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Nesta questão, dois alunos responderam: "é uma função ou um ponto", na realidade a expressão analítica da derivada é outra função, chamada de função derivada que representa a variação da curva em cada ponto. Outro aluno escreveu 'hipérbole ou paralelismo". Esta resposta não tem evoca nenhuma representação conceitual.

4ª questão O que significa derivar uma função? Com esta questão objetivou-se avaliar se o aluno sabia que derivar uma função era achar uma aproximação local de uma curva. E que a derivada de uma função nos fornece informações sobre a função.

Um aluno respondeu "derivar uma função é torná-la mais simples. É simplificá-la a ponto de chegar a sua forma mais prática. As derivadas podem ser derivadas da soma, produto, do quociente, etc."

"é separar uma função e resolver por partes, tendo sempre uma constante C(somando)", nesta resposta o aluno lembrou da integral. Estas respostas evocam a representação simbólica, enfatizando que os alunos lembravam mais das regras de derivação, isto é dos procedimentos de cálculo.

Considerações Finais

As análises das respostas dos alunos apontam a predominância da dimensão gráfica e simbólica do conceito de derivada. Estas, nem sempre articuladas. Isso pode ser reflexo de um ensino com ênfase nos procedimentos. Em nenhum momento apareceu a dimensão numérica, ou seja, a derivada como uma taxa de variação, isto é preocupante. Pois, a História tem revelado que a noção de derivada surgiu da busca de processos para resolução de problemas de taxa de variação. Mas, muitas vezes a derivada é abordada em alguns livros de cálculo de forma antagônica como se apresenta na evolução histórica do conhecimento. Dando mais ênfase aos procedimentos de cálculos algébricos, alijando os alunos de experimentarem a construção do conceito através de problemas.

Assim, acreditamos que não compreendendo os conceitos, o aluno não consegue transferi-los a outras situações práticas onde eles poderiam ser aplicados. Isso revela que a qualidade das aprendizagens dos estudantes ainda é estreita e bastante relacionada à aplicação de regras e procedimentos - o que dificulta aos estudantes o desenvolvimento de uma postura autônoma quanto ao uso do raciocínio na abordagem de problemas em seus campos profissionais. Estes são alguns dos indícios de que a universidade ainda tem muito a conquistar para vencer o desafio de democratizar o acesso a estes conhecimentos em seus cursos de graduação. E no ensino de Cálculo o professor deve estar atento para abordar todos os aspectos do conceito em várias situações problemas para que o aluno possa ampliar sua visão do conceito.

Bibliografia

CORNU, B. **Interference dês Modéls spontanés dans l' Apprentissage de la notion de limite. Séminare de recherge Pedagogique** IMAG: 236-268, Grenoble, 1981.

CORNU, B. **Aprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles**. Thési Doctorad. Université Scientfique et Medicale de Grenoble, 1981.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas (SP): Unicamp, 2004.

GODOY, Luis Felipe Simões de. **Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem**. Dissertação(mestrado).PUC-São Paulo. 2004.

GÓMEZ-GRANELL, Carmem. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana & TOLCHINSKY, Liliana (Orgs.). **Além da**

alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. 4ª edição, São Paulo: Ática, 2002.

GUIMARÃES , Osvaldo Luiz Cobra. Cálculo Diferencial E Integral Uma Mudança De Foco: **Do Algebrismo Às Representações Múltiplas, através de Atividades de Modelagem Matemática e Ambientes Informatizados**. Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção, 2002.

LEME, Jayme do Carmo Macedo. **Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada. Dissertação (mestrado).** PUC/SP-São Paulo, 2003.

MOREIRA, M.A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. In: **Investigações em Ensino de Ciências**, v.7, n.1, 2002.

PAIS, Luiz Carlos. Formação de conceitos e campos conceituais. In:**__Didática da Matemática: análise da influência francesa**. 2ª edição, Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2001, capítulo V.

KENDAL, M. **Teaching and Learning introductory differential calculus with Computer Algebra System.** Tese (Doutorado de Filosofia). Universidade de Melbourne. Melbourne, 2001.

SIERPINSKA, A. **Representation spontanée de Lá Notion de Limite élèus Didatique et Pedagogie des mathematiques,** IMAG, n. 29, p. 78-107, Grenoble, 1981.

SOUZA, Luciana Gastaldi Sardinha ; FATORI, Luci Harue ; BURIASCO, R. L. C. . **Como Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática Lidam com Alguns Conceitos Básicos para Cálculo I.** Bolema (Rio Claro), v. 24, n. 24, p. 57-78, 2005.

STERWART, James. **Cálculo**. Volume I. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TALL, D. e VINNER, S. **Concept Image an Concept Definition in mathmatics with particular reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 12, p. 293-305, 1983.

WENZELBURGER, Elfriede. **Cálculo Diferencial**. Grupo Editorial Iberoamérica: México, 1993.