

COMPREENSÃO DOS ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO SOBRE O SIGNIFICADO DO SÍMBOLO “=” EM UMA IGUALDADE ARITMÉTICA

José Dílson Beserra Cavalcanti
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia-UFRB
Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática-UFPE
dilsoncavalcanti.ufrb@gmail.com

Marcelo Câmara dos Santos
Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática-UFPE
Cap-UFPE/SBEM
marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

RESUMO

O presente artigo é um recorte de alguns dos resultados obtidos em nossa dissertação de mestrado e é fundamentado em duas idéias. A primeira é que o significado do símbolo “=” não se restringe a denotar igualdade, podendo apresentar diferentes significados a depender do contexto no qual está inserido. A segunda idéia é a de que nem sempre as concepções dos alunos são compatíveis com o significado do símbolo “=”. Nosso objetivo neste trabalho é discutir as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre o significado do símbolo “=”, particularmente, numa expressão representando o contexto das igualdades aritméticas. Conforme nossos resultados, os alunos demonstraram diferentes concepções sobre o significado do símbolo “=”, sendo que a maior parte destas concepção não foram compatíveis com os atributos deste símbolo no contexto das igualdades aritméticas.

Introdução

No senso comum, podemos dizer que o significado genérico do símbolo “=” é *igualdade*. Entretanto, o sinal de igualdade em Matemática e no ensino de Matemática, ao longo dos anos, parece que incorporou uma variedade de outros significados. A começar pela maneira que esse símbolo é introduzido nas atividades de Matemática, podemos dizer que seu significado não é bem designar igualdade.

Logo cedo, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, as crianças começam a estudar a linguagem aritmética, na qual surge o símbolo “=”. Conforme Freudenthal (1983), a linguagem aritmética é tão formal que os problemas precisam obedecer a certas regras, tais como: “ $7 + 5 =$ ” é admissível, enquanto que “ $7 + = 5$ ”, não é.

Considerando que o ensino de Matemática na primeira etapa do Ensino Fundamental é, quase sempre, centrado no estudo dos números e operações aritméticas,

podemos argumentar que é bastante comum encontrar o símbolo “=” em atividades do tipo: resolva: $7 + 5 =$ e $7 - 5 =$, por exemplo. Nesse sentido, o sinal de igualdade apresenta um significado operacional correspondendo a uma ação a ser realizada ou indicando o lugar no qual se deve colocar o resultado. De fato, é extensa a literatura que reconhece o significado operacional (eg. FREUDENTHAL, 1983; BROUSSEAU e ANTIBI, 2000; VERGNAUD, CORTES e FAVRE-ARTIGUE, 1987; KIERAN, 1981, MOLINA, 2006, CAVALCANTI e CÂMARA DOS SANTOS, 2007a; 2007b).

Conforme Freudenthal (1983), em uma operação como $4 + 3 =$, o símbolo “=” apresenta um aspecto assimétrico. Um lado é dado e o outro deve ser preenchido. As operações, por sua vez, são lidas, prioritariamente, como tarefas a serem executadas ou como perguntas. Por exemplo, as perguntas “quanto é $4 + 3$?” e, “quanto é $7 - 4$?” podem sugerir as respectivas tarefas: “adicione 3 a 4”, e, “subtraia 4 de 7. Dependendo de como se lê, a entonação interrogativa sugere expectativas como:

- “após a tarefa: a execução,
- após a pergunta: a resposta” (FREUDENTHAL, *ibid.*, p. 466).

A mais de trinta anos, diversos pesquisadores vêm evidenciado que a compreensão do significado do símbolo “=” como símbolo que indica cálculo ou o resultado (concepção operacional) não se restringe ao contexto das operações aritméticas. Outro aspecto evidenciado é que esta concepção é persistente, no sentido de que até alunos das séries finais do Ensino Fundamental também costumam compreender o símbolo “=” de maneira operacional, o que dificulta a compreensão do conceito de igualdade.

O conceito de igualdade, por sua vez, é um dos mais importantes conceitos matemáticos da escola básica. Contudo, as atividades que de alguma maneira acabam por utilizar as igualdades aritméticas parecem reduzi-las a um tipo de operação aritmética, por exemplo, “ $3 + 4 =$ ” com o seu resultado “7”. Logo, a compreensão da igualdade “ $3 + 4 = 7$ ” corresponde mais à idéia “operação aritmética seguida do resultado” do que ao conceito de igualdade com suas propriedades e com seu significado particular. Com efeito, Brousseau e Antibi (2000) explicam que tanto o raciocínio quanto o discurso escolar nas séries iniciais tratam a igualdade como um procedimento, no qual “o símbolo ‘=’ anuncia simplesmente o resultado de um cálculo” (p. 30).

Molina (2005) afirma que, durante a aprendizagem da Aritmética, os estudantes encontram e manejam igualdades numéricas contendo as operações básicas de adição,

subtração, multiplicação e divisão. Contudo, estas igualdades correspondem, em sua maior parte, a igualdades de ação¹ com a operação do lado esquerdo e o resultado do lado direito. Nesse sentido, podemos dizer que é bastante trivial a utilização de igualdades aritméticas nas quais os símbolos operatórios sempre precedem o símbolo “=” ($a + b = c$), enquanto que igualdades nas quais os símbolos operatórios sucedam o “=” ($c = a + b$) não parecem tão familiares.

O símbolo “=”, nessas igualdades aritméticas (de ação), não está necessariamente significando algo a ser realizado, pois já tem uma resposta, ou seja, não é dado um lado e o outro deve ser preenchido, como explica Freudenthal (1983) no que se refere às operações do tipo $3 + 4 =$. Contudo, isso não garante que o “=” não apresente um significado operacional nas igualdades aritméticas.

De fato, se observamos à luz do significado operacional correspondente ao contexto das operações aritméticas, podemos pensar que o “=” indica que algo foi realizado. Portanto, em $3 + 4 = 7$, o sinal de igualdade não significa que uma ação deverá ser realizada como em $3 + 4 =$, mas indica que os números 3 e 4 foram somados resultando no número 7.

A idéia de que o “=” indica o lugar do resultado, associado ao significado operacional, também é válida para as igualdades que apresentam a operação do lado esquerdo do sinal de igualdade e o resultado do lado direito. Freudenthal (1973) indica, nesse sentido, que “a velha e natural interpretação de $2 + 7 = 9$ é: considerando 2, adicionando 7, o resultado é 9” (p. 301). Contudo, Freudenthal (ibid.) relata que essa interpretação tem sido rejeitada. Assim, $2 + 7$ é visto como um número, e, a expressão total é lida como uma afirmação pronunciando que dois números são iguais, isto é, o número representado por $2 + 7$ é igual ao número representado por 9.

Em outro texto, Freudenthal (1983) indica que “o sinal de igualdade é entendido para significar uma identidade” (p. 465), em termos que os seus lados, esquerdo e direito, correspondem a nomes da mesma coisa. O autor ilustra sua posição demonstrando que os lados, esquerdo e direito do “=” correspondem à mesma coisa tanto em $7 + 5 = 12$ quanto em $12 = 7 + 5$. Isso ainda é válido para $7 + 5 = 5 + 7$ ou também para $12 = 12$.

¹ Igualdades de ação são aquelas nas quais as operações aparecem expressas em apenas um lado da igualdade, como por exemplo, as igualdades $3 + 4 = 7$ e $7 = 3 + 4$ são de ação enquanto a igualdade $3 + 4 = 5 + 2$, não é.

Vergnaud (1994), por sua vez, explica que a *relação de igualdade* é uma relação simétrica, transitiva e reflexiva e, conseqüentemente, uma relação de equivalência, porém, tem uma particularidade suplementar de afirmar que o que está à direita do sinal de igualdade é a mesma coisa do que está à esquerda.

Em outras palavras, uma relação de igualdade não afirma somente uma equivalência, mas também uma identidade. Vergnaud (ibid.) elucida isso por meio da análise de um exemplo numérico. Na igualdade $3 + 4 = 7$, as propriedades das relações de equivalência são verdadeiras e utilizáveis:

– simétrica	$3 + 4 = 7$	\Longrightarrow	$7 = 3 + 4$
– transitiva	$3 + 4 = 7$	\Longrightarrow	$3 + 4 = 5 + 2$
	$7 = 5 + 2$		
– reflexiva	$7 = 7$		
	$3 + 4 = 3 + 4$		

Ao mesmo tempo, dizer que na igualdade $3 + 4 = 7$ trata-se do mesmo número à direita e esquerda do sinal de igualdade, significa que a expressão simbólica $3 + 4$ representa o mesmo número que representa o símbolo 7 (VERGNAUD, 1994). Em outros termos, esclarece ainda esse autor, a igualdade pode ser entendida de duas maneiras:

- como uma identidade no nível do número representado,
- como uma equivalência entre as diferentes representações simbólicas deste número.

Assim, a relação de igualdade representa, ao mesmo tempo, uma identidade única de significado e a equivalência dos diferentes significantes, ou seja, ela pode ser entendida nesses dois níveis (VERGNAUD, ibid.).

Metodologia

Participaram da pesquisa duzentos e cinco alunos do 3º ano do Ensino Médio de escolas públicas da região metropolitana do Recife. É importante ressaltar que a pesquisa que realizamos foi bem mais ampla e nossos objetivos de pesquisa foram

investigar as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo “=” em quatro contextos, dois aritméticos (operações e igualdades) e dois algébricos (equações e funções). Outro objetivo deste estudo foi verificar se as concepções dos alunos modificavam em relação à estrutura da expressão que representava cada contexto, por exemplo, operação antes do “=” ($a + b = c$) ou operação depois do “=” ($c = a + b$).

O experimento consistiu na aplicação de dois instrumentos de investigação. Cada instrumento, por sua vez, foi constituído por quatro expressões representando os contextos supracitados. Ressaltamos que os resultados que vamos discutir neste artigo correspondem apenas ao contexto das igualdades aritméticas e, particularmente, com o sinal operatório antes do símbolo “=” ($a + b = c$).

Nesse sentido, esclarecemos que a expressão correspondente utilizada foi a igualdade aritmética $14 + 8 = 22$ (símbolo operatório + antes do símbolo “=”), assim como podemos observar na figura abaixo.

c) $14 + 8 = 22$

1) Como você explica essa expressão? _____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? _____

Figura 1 - Item **a** do instrumento **1**

O item **a**, conforme figura 1, diz respeito a uma expressão representando uma igualdade aritmética. O objetivo deste item foi identificar as concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade numa igualdade aritmética na qual o símbolo de operação + encontra-se no lado esquerdo do símbolo “=”.

Principais resultados

A finalidade desta investigação foi discutir as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre o significado do símbolo “=” na igualdade aritmética $14 + 8 = 22$. Conseguimos identificar quatro concepções distintas que denominamos de: *operacional*; *igualdade relacional*; *relacional nome-símbolo* e *símbolo separador*, que serão caracterizadas a seguir.

Caracterização das concepções identificadas

Concepção operacional. Nesta concepção, o sinal de igualdade é compreendido como símbolo que indica uma ação a ser realizada ou o local onde se coloca o resultado. Como já discutimos na introdução deste trabalho, essa utilização é comum no cálculo de operações aritméticas. Por exemplo, na operação aritmética $3 + 4 =$, o sinal de igualdade indica, ao mesmo tempo, que a soma deve ser realizada e o local onde se deve colocar a resposta. Contudo, a literatura demonstra que este significado não fica restrito a este contexto das operações aritméticas nem tampouco nas séries iniciais. De fato, mesmo alunos dos anos finais do Ensino Fundamental também compreendem o significado do “=” no contexto das igualdades aritméticas de maneira operacional (KIERAN, 1981).

Concepção igualdade relacional. Diferentemente da operação aritmética $3 + 4 =$, o símbolo “=”, na igualdade aritmética $3 + 4 = 7$, não é assimétrico, pois os dois lados são dados, nem indica que se deve efetuar um cálculo. Em linhas gerais, podemos dizer que o “=” está representando uma relação de igualdade² estabelecida entre os lados, esquerdo e direito, de uma igualdade aritmética. Do ponto de vista dos alunos, Behr, Erlwanger e Nichols (ibid.) apontam que o símbolo “=” seria considerado um símbolo relacional se fosse compreendido como indicando uma comparação entre os dois membros de uma igualdade. Em nossa opinião, estas duas posições não são incompatíveis, e englobam a idéia de que os dois lados da igualdade têm o mesmo valor, ainda que os símbolos sejam diferentes.

As concepções operacional e igualdade relacional podem ser consideradas concepções semânticas, pois são relacionadas às características do significado do símbolo “=” num dado contexto. Por exemplo, a concepção operacional corresponderia aos atributos do símbolo “=” no contexto das operações aritméticas enquanto que a concepção igualdade relacional, no contexto das igualdades aritméticas. Já as concepções relacional nome-símbolo e símbolo separador não estão diretamente associadas aos atributos do símbolo “=” a depender do contexto no qual está inserido.

Concepção Relacional Nome-Símbolo. Nesta concepção, o símbolo “=” não é compreendido com um significado semântico, mas sim corresponde a um tipo de relação que estamos chamando, neste momento, de *nome-símbolo*, que é muito forte no que diz respeito ao símbolo “=” e o nome igualdade. Com efeito, podemos dizer que é

² Na acepção de Vergnaud (1994).

difícil olharmos para o símbolo “=” e não pensarmos em igualdade de maneira imediata e sem qualquer controle, sugerindo até que este tipo de associação acontece de maneira automática.

Concepção Símbolo Separador. Em linhas gerais, podemos caracterizar a concepção símbolo separador como a interpretação do sinal de igualdade em termos de separar ou unir, por exemplo: a incógnita e seu valor (ex.: $x = 2$); o primeiro membro e o segundo membro de uma equação (ex.: $2x + 2 = 10 + 8$); a variável dependente, da variável independente (ex.: $y = ax + b$) e, particularmente, no contexto das igualdades aritméticas, a operação e seu resultado (ex.: $5 + 7 = 12$).

Para melhor compreensão dos resultados, apresentaremos os dados em uma tabela, correspondente ao item **a** do instrumento **1** e, em seguida, ilustraremos cada concepção com a discussão de um protocolo.

Expressão	Igualdade aritmética
Concepções	$14 + 8 = 22$
Operacional	51,0%
Relacional nome-símbolo	30,4%
Igualdade relacional	15,6%
Símbolo Separador	2,0%
Não identificada	1,0%
Não respondeu	0%
Total	100%

Tabela 01 – Igualdade aritmética (Instrumento 1)

Como podemos observar, a maior parte dos alunos apresentaram uma concepção operacional ou relacional nome-símbolo, enquanto que apenas pouco mais que 15% reconheceram o símbolo “=” como uma relação de igualdade.

a) $14 + 8 = 22$

1) Como você explica essa expressão? essa expressão é uma expressão simples.

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? este símbolo significa que depois desse símbolo vem o resultado das questões.

Quadro – 01 Protocolo (instrumento1/36)

No protocolo **instrumento1/36**, quando o aluno responde que depois do “=” vem o resultado das questões, fica clara a idéia do sinal de igualdade como sinal para mostrar a resposta ou resultado, o que corresponde a uma concepção operacional.

The image shows a handwritten student response to a question about the expression $14 + 8 = 22$. The question asks for an explanation of the expression and the meaning of the equals sign. The student's response is written in cursive on lined paper. A dashed arrow points from the equals sign in the question to the student's answer.

a) $14 + 8 = 22$

1) Como você explica essa expressão? Essa expressão é uma adição, uma soma

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? O símbolo de igualdade

Quadro 02 – Protocolo (**instrumento1/54**)

A resposta do aluno no protocolo **instrumento1/54**, deixa claro que, no que concerne ao significado símbolo “=” na igualdade $14 + 8 = 2$, ele está apenas considerando o nome do símbolo “=”, no caso, igual. Dessa maneira, entendemos que o aluno está interpretando o significado do “=” apenas em termos da relação nome-símbolo.

The image shows a handwritten student response to a question about the expression $14 + 8 = 22$. The question asks for an explanation of the expression and the meaning of the equals sign. The student's response is written in cursive on lined paper. A dashed arrow points from the equals sign in the question to the student's answer.

a) $14 + 8 = 22$

1) Como você explica essa expressão? É uma expressão onde a soma dos valores do 1º membro corresponde ao valor do 2º membro.

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? que o valor obtido na operação é o mesmo depois da igualdade só que representado de forma diferente.

Quadro 03 – Protocolo (**instrumento1/80**)

Analisando o protocolo **instrumento1/80**, observamos que o aluno reconhece que o símbolo “=” denota tanto a identidade de valor do 1º e 2º membro, quanto a equivalência de representações diferentes para o mesmo valor, tal como caracterizamos na concepção igualdade relacional.

a) $14 + 8 = 22$

1) Como você explica essa expressão? Essa expressão significa um monte de números.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? O símbolo tem como sentido separar os números.

Quadro 04 – Protocolo (instrumento1/26)

No protocolo anterior, o aluno explica a expressão $14 + 8 = 22$ como um “monte de números”, não a reconhecendo também como uma igualdade. Em relação ao significado do sinal de igualdade, ele escreveu que correspondia à separação dos números, portanto, demonstrando o que denominamos de concepção símbolo separador.

Considerações Finais

A concepção compatível com o significado do símbolo “=” no contexto das igualdades aritméticas é a que denominamos de concepção Igualdade Relacional. Os resultados do presente estudo demonstraram que a maior parte dos sujeitos apresentou uma concepção operacional ou relacional nome-símbolo. Deste modo, compreendemos que estes resultados indicam que a tendência maior foi os alunos demonstrarem uma concepção associada a outro contexto particular, no caso, a concepção operacional que é associada ao contexto das operações aritméticas, ou, uma concepção associada à relação entre o símbolo “=” e o nome igualdade, no caso, a concepção relacional nome-símbolo.

Conseqüentemente, estes resultados indicam que a maioria dos sujeitos não demonstraram a concepção igualdade relacional, compatível, em nosso entendimento, com o significado do símbolo “=” no contexto das igualdades aritméticas.

Este desencontro entre o significado do símbolo “=”, no contexto no qual está inserido, e as concepções dos alunos, pode ser entendido como aquilo que parte da literatura sobre concepções denomina de *concepções errôneas*. No entanto, elucidamos que não vamos aprofundar esta discussão, pois não caberia aos objetivos que propomos para nossa investigação. Esclarecemos que a nossa pesquisa não nos permite atribuir causas a estas concepções errôneas. Nesse sentido, entendemos que novas investigações

podem ser realizadas com a finalidade de estudar as possíveis causas referentes à problemática das concepções errôneas acerca dos significados do “=”.

REFERÊNCIAS

BEHR, M., ERLWANGER, S., e NICHOLS, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.

BROUSSEAU, G., e ANTIBI, A. (2000) La dé-transposition des connaissances scolaires. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20/1 pp. 7-40. La pensée sauvage.

CAVALCANTI, J. D. B., e CÂMARA DOS SANTOS, M. (2007a). Noção operacional e equivalência: um estudo sobre a compreensão do sinal de igualdade. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. *Anais do IX ENEM*. Belo Horizonte.

_____, J. D. B., e CÂMARA DOS SANTOS, M. (2007b). Um estudo sobre a compreensão do sinal de igualdade com alunos da 6ª série do ensino fundamental. In: Reunión Comité Interamericano de Educación Matemática 'XII CIAEM', Santiago de Querétaro-México. *Memorias do XII CIAEM*, 2007.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an education task*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

_____, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Mathematics education Library. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

KIERAN, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

MOLINA, M. (2005). *Resolución de Igualdades Numéricas por Estudiantes de Tercer Grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional*. Trabajo de Investigación Tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponível em: <http://biblioteca.unirioja.es/dialnet/490677.pdf>.

_____, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

VERGNAUD, G. (1994). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Collection Exploration - cours et contributions pour les sciences de l'éducation. Peter Lang.

_____, G., CORTES, A., e FAVRE-ARTIGUE, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles: problèmes épistémologiques et didactiques. Em: G. Vergnaud, G. Brousseau, e M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisitions des connaissances scientifiques: Actes du Colloque de Sèvres* (pp. 259-280). Sèvres, France, La Pensée Sauvage.